# PROGRESIONES

## 0. INTRODUCCIÓN

Una sucesión de números es una secuencia de números dados en un orden.
Podría ser el resultado de una serie de observaciones en un experimento científico.
Descubrir su ley de formación es uno de los objetivos de la ciencia.
Uno de los ámbitos en los que se utilizan es en los test de razonamiento para estimar esta capacidad intelectual.

### TEST RAZONAMIENTO

Repaso del alfabeto
Examina esta serie de letras: ¿cuál sería la letra siguiente?

| | | | |
|---|---|---|---|
| a b a b a b a b | a b c d e f | | |

¿Cuál sería la letra siguiente?

| | | | |
|---|---|---|---|
| c a d a e a f a | a c d e f g | | |

Ahora las siguientes:

| | | | |
|---|---|---|---|
| c d c d c d | a b c d e f | | |
| a a b b c c d d | a b c d e f | | |
| a b x c d x e f x g h x | h i j k x y | | |

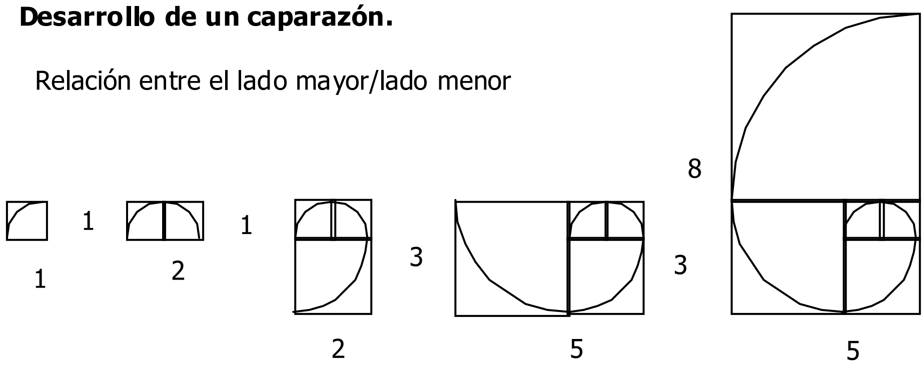
Lo mismo para las siguientes:

| | | | |
|---|---|---|---|
| a a a b b b c c c d d | a b c d e f | | |
| a x b y a x b y a x b | a b c x y z | | |
| a b m c d m e f m g h m | g h i j m n | | |
| r s r t r u r v r w r x r | r s t w x y | | |
| a b c d a b c e a b c f a b c | a b c f g h | | |

## CAPARAZÓN

**Desarrollo de un caparazón.**

Relación entre el lado mayor/lado menor

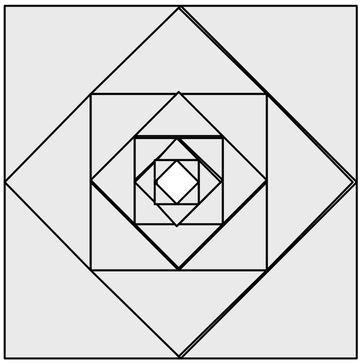



1/1 = 1   2/1 = 2   3/2   5/3   8/5

La sucesión en este caso sería:

$$\frac{1}{1};\ \frac{2}{1};\ \frac{3}{2};\ \frac{5}{3};$$

## SUMAS INFINITAS



Si el cuadrado mayor tiene de lado 1. ¿Cuánto miden las superficies de las 4 esquinas sucesivas de los cuadrados que se van formando?

## APILAR CAJAS

Queremos apilar cajas en forma de triángulo. Si son 210 las cajas a apilar, ¿por qué número tenemos que empezar la base?

Sol:

Se trata de una p.a. con $a_1=1$ que sería la cúspide y d=1 puesto que cada fila tiene una caja más que la anterior yendo de arriba abajo.

Por lo tanto 1+2+3+4+5+…=210; es decir, $S_n = \dfrac{(a_1+a_n)\cdot n}{2} = \dfrac{(1+n)\cdot n}{2} = 210$

Resolvemos la ecuación resultante y obtenemos n=20. Luego debemos empezar por 20 cajas.

## 1. SUCESIÓN

### DEFINICIÓN

Una sucesión es una secuencia de números ordenados naturalmente (según N). Es decir, asociar a cada número natural uno y sólo un valor de otro conjunto numérico.

Normalmente se forman según algún criterio que nos permite hallar sus términos.

Existen sucesiones en las ciencias experimentales que resultan de la recopilación de datos según un orden.

Por ejemplo,

El crecimiento que vamos observando en un árbol al cabo de los años: 3m; 5m; 7m;…

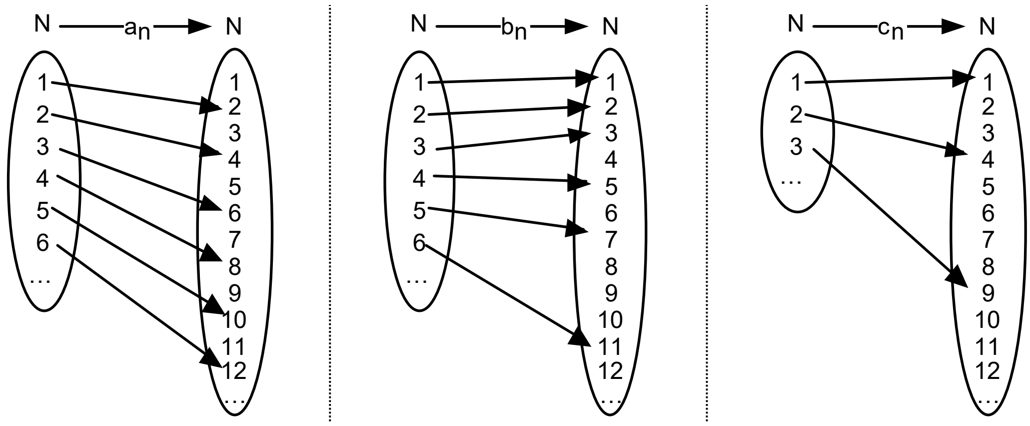
El nº de bacterias en un cultivo según los días: 1 millón, 2 millones, 4 millones,…

El espacio total recorrido por un móvil en caída libre según el número de segundos que pasan: 20 cm; 60cm; 120cm;…

### Ejemplos

Son sucesiones formadas por números naturales las siguientes:

- La sucesión de los números pares: 2, 4, 6, 8, 10,…
- La sucesión de los números primos: 2, 3, 5, 7, 11, 13,…
- La sucesión de los cuadrados perfectos: 1, 4, 9, 16, 25,…




### TÉRMINOS DE UNA SUCESIÓN

Se llaman así a los números que forman la sucesión.

Se representan por una letra y un subíndice.

La letra da el nombre a la sucesión.

El subíndice la posición del término en el conjunto.

$a_n$ es el término general; es decir, un término cualquiera. Es el nombre de la sucesión.

$a_3$ sería el tercer término de la sucesión.

En los ejemplos del principio:

$a_3 = 6$; $b_3 = 3$; $c_3 =$

### Fórmula

Algunas sucesiones admiten una fórmula; es decir, una expresión numérica que permite averiguar cualquier término de la sucesión.

$$a_n = f(n)$$

Las ciencias experimentales tratan de obtener fórmulas a través de los datos experimentales. Es un proceso de inducción.

**Ejemplos**

- $a_n = 2 \cdot n$
- $b_n$ no se conoce fórmula
- $c_n =$

Hallar la fórmula de las siguientes sucesiones: múltiplos de tres, los impares, cuadrados perfectos menos 1.

Se llaman sucesiones recurrentes a las que sus términos se obtienen operando términos anteriores.

El ejemplo más significativo es la llamada sucesión de Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8,… cuyos dos primeros términos son 1 y 1 y los demás se obtienen sumando los dos anteriores.

## 2. PROGRESIONES ARITMÉTICAS

**Aritméticas**

Cada término se obtiene sumándole al anterior una cantidad constante que se llama diferencia. Por ejemplo: 3, 8, 13, 18, 23,…

$$\boxed{3} \xrightarrow{+5} \boxed{8} \xrightarrow{+5} \boxed{13} \xrightarrow{+5} \boxed{18} \xrightarrow{+5} \boxed{23} \xrightarrow{+5} \dots$$

Término general o fórmula:

$a_1$: primer término
d: diferencia
$a_k$: término k

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

$$a_n = a_k + (n-k) \cdot d$$

**Ejemplo**

- ¿Cuál es el término $a_{20}$ de la sucesión anterior?

- ¿Cuál es la fórmula o término general de la sucesión anterior?

Una sucesión se puede comprobar si es aritmética si la diferencia de dos términos consecutivos es constante.

## 3. SUMA DE TÉRMINOS CONSECUTIVOS DE UNA P.A.

Anécdota de Gauss.

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

## 4. PROGRESIONES GEOMÉTRICAS

Aquellas en que cada término se obtiene multiplicando al anterior por una cantidad constate que se llama razón. Por ejemplo: 3, 6, 12, 24, …

$$\boxed{3} \xrightarrow{x2} \boxed{6} \xrightarrow{x2} \boxed{12} \xrightarrow{x2} \boxed{24} \xrightarrow{x2} \boxed{\phantom{00}} \xrightarrow{x2} \dots$$

El término general o fórmula de estas sucesiones es:

| | | |
|---|---|---|
| $a_1$: | primer término | $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$ |
| r: | razón | |
| $a_k$: | Término k | $a_n = a_k . r^{n-k}$ |

**Ejemplo**

- ¿Cuál es el término $a_7$ de la sucesión anterior?

- ¿Cuál es la fórmula de la sucesión anterior?

Una sucesión se puede comprobar si es geométrica si las razones de los términos consecutivos son constantes.

## 5. SUMA DE TÉRMINOS CONSECUTIVOS DE UNA P.G.

Anécdota del ajedrez

$$S_n = \frac{a_1 - a_n \cdot r}{1-r}; \, o \ bien, \, S_n = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r-1}; \, o \ bien, \, S_n = \frac{a_1 \cdot \left(r^n - 1\right)}{r-1}$$

### SUMA DE INFINITOS TÉRMINOS |r|<1

Explicarlo partiendo de la longitud del segmento 1.

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-r}$$

Pensar en el valor de $0'5^\infty; 0'3^\infty; \left(-0'5\right)^\infty; \left(\frac{1}{3}\right)^\infty; 2^\infty \ y \ otros$